心身科学 第2巻第1号（43–48）（2010）

一対比較データのための最尤非対称多次元尺度構成法の適用事例
――東アジア諸国及び関係国間の友好度データの分析――

佐部利　真　吾*1)　　千　野　直　仁*2)

本研究では，一対比較データのための最尤非対称多次元尺度構成法の適用事例を示す．この方法はAICにより様々な候補モデルを比較でき，また各種対称性仮説を検定することができる．本研究ではこの方法を，拡張された完全三組法により収集した，中国，日本，北朝鮮，ロシア，韓国，アメリカ間の友好度データに適用した．対称性検定の結果，いくつかの対称性仮説は棄却されず，他の対称性仮説に対する検定では概ね有意傾向であった．AICにより，３次元ユークリッド距離モデルが最適モデルとなったものの，3次元のOkada & Imaizumi（1987）によるモデルもほぼ同じAICの値を示した．これらの結果は同様の関係を扱った先行研究の結果と比較された．

キーワード：asymmetric multidimensional scaling, maximum likelihood method, paired comparison

I　問　　題

多次元尺度構成法（Multidimensional Scaling: MDS）とは，対象をある次元の空間に埋め込んで対象間の（非）類似度等の関係を表現する手法である．伝統的には対象間の関係は対称であると仮定されてきたものの，実際の現象には必ずしも対称でない関係も存在する．小集団内の成員間の好き・嫌いの関係がその典型である．こういった非対称な関係も扱うことができる“非対称”MDSも様々提案されてきている（例えば，Borg & Groenen, 2007）．特にSaburi & Chino（2008）は非対称MDSのための最尤的方法を提案し，それをASYMMAXSCAL（*ASYM*metric *MAXSCAL*）と呼んだ．ASYMMAXSCALは，Takane（1981）による対称MDSのための最尤的方法であるMAXSCALを非対称MDSに拡張したものであり，モデル選択や最適な尺度水準の決定，各種対称性仮説の検定ができる等の特長を有する．この方法が対象にするのは評定尺度法により得られたデータであり，例えば，人物Aから人物Bへの好意度を「好き」～「嫌い」の5段階で第三者に尋ねたものがこれにあたる．その一方で，Takane（1978a, b）は一対比較データのための最尤MDSを提案している．そしてSaburi & Chino（2007）はこの方法を非対称MDSに拡張した方法を提案した．ここで扱うのは，例えば，AとB間の非類似度と，CとD間の非類似度の，どちらが高いかというデータや，完全三組法（the complete method of triads; Torgerson, 1952）を用いた，AはBとCのどちらにより近いかといったデータである．

本研究では，まずSaburi & Chino（2007）の方法を概観し，次にその方法を，東アジア諸国とその関係国（中国，日本，北朝鮮，ロシア，韓国，アメリカ）間の友好度を調べたデータに適用した事例を示す．そしてその結果を，同様の関係を評定尺度法で測定しASYMMAXSCALを適用した事例（Saburi & Chino, 2008）との比較により検討する．

II　分析手法の概要

1　下位モデル

本方法は表現モデル，誤差モデル，反応モデルの3つの下位モデルを仮定する．そのうち表現モデルは非類似度の表現を定義する．ここでは対象 i の対象 j への非類似度 g_{ij} について，Okada & Imaizumi（1987）

＊1）愛知学院大学大学院心身科学研究科心理学専攻
＊2）愛知学院大学心身科学部心理学科
（連絡先）〒470–0195 愛知県日進市岩崎町阿良池12　E-mail: saburi@dpc.agu.ac.jp

によるモデル（OI モデル）

$$g_{ij} = d_{ij} - r_i + r_j, \tag{1}$$

と，ユークリッド距離モデル $g_{ij} = d_{ij}$, そして g_{ij} に構造を仮定しない飽和表現モデル（saturated representation model: SR モデル），$g_{ij} = g_{ji}$ を仮定した“対称”飽和表現モデル（対称 SR モデル）を用いる．ここで，d_{ij} は対象 i と対象 j 間のユークリッド距離であり，r_i は対象 i に付随する円（または球，超球）の半径である．

g_{ij} には誤差が付随すると仮定し，誤差モデルはその誤差分布を特定する．ここでは次の加算誤差モデルを仮定する：

$$\tau_{ij}^{(t)} = g_{ij} + e_{ij}^{(t)}, \qquad e_{ij}^{(t)} \sim N\big(0, \sigma_{ij}^2\big). \tag{2}$$

ここで (t) は判断の機会を示し，これ以降は省略する．σ_{ij}^2 については，ここでは i, j に共通のパラメータを仮定する．つまり，$\sigma_{ij}^2 = \sigma^2$ とする．

反応モデルは判断者の判断過程を特定する．判断者は，対象 i の対象 j への類似度 o_{ij} が，対象 k の対象 l への類似度 o_{kl} より大きい（$o_{ij} > o_{kl}$ と表記する）かどうかを判断するものとする．ここで，判断者の反応の表記である o_{ij} と，モデル上の g_{ij}，τ_{ij} を混同しないように注意する．サーストンの比較判断の法則（Thurstone's law of comparative judgment）に準じ，$o_{ij} > o_{kl}$ と判断される確率は，加算誤差モデルの下で，

$$p_{ijkl} = \Pr(\tau_{ijkl} < 0), \tag{3}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(\tau_{ijkl})\, d\tau_{ijkl}, \tag{4}$$

と書ける．ここで，$\tau_{ijkl} = \tau_{ij} - \tau_{kl}$ であり，f は平均 $g_{ij} - g_{kl}$，分散 $2\sigma^2$ の正規分布の密度関数である．

2　最尤基準

すべての組み合わせの判断が相互に独立であるとすると，本方法で最大化すべき尤度は

$$L = \prod_{\Omega} p_{ijkl}^{Y_{ijkl}} (1 - p_{ijkl})^{n_{ijkl} - Y_{ijkl}}, \tag{5}$$

と書ける．ここで，Y_{ijkl} は $o_{ij} > o_{kl}$ と判断された度数，n_{ijkl} は o_{ij} と o_{kl} の組み合わせに対する判断の総数，Ω は o_{ij} と o_{kl} に対する判断が実際に行われた，i, j, k, l の組み合わせの集合である．この判断の独立性を確保する単純な方法は，判断者が唯一の組み合わせを判断する“単一判断サンプリング”（single-judgment sampling; Bock & Jones, 1968）を行うことである．

3　データ収集法

実際のデータ収集場面では，完全三組法が，判断者が判断しやすく判断者数も抑えられる．この収集法は，本論文の表記ではすべての i, j, k の組み合わせについて $o_{ij} > o_{ik}$ か $o_{ij} < o_{ik}$ かを判断させるものである．ただし，非対称性を許すモデルを考える場合，このタイプのデータだけでは不定性が生じる恐れがある．その場合，すべての i, j, k の組み合わせについて $o_{ji} > o_{ki}$ か $o_{ji} < o_{ki}$ かを判断させたデータを加えることが考えられる．

4　モデル比較

本方法は ASYMMAXSCAL と同様，AIC（Akaike Information Criterion; Akaike, 1973）

$$\mathrm{AIC} = -2 \ln L + 2v, \tag{6}$$

によりモデル間でデータとの適合度を比較でき，最適なモデルを選ぶことができる．ここで，v はモデルの有効パラメータ数である．候補モデルには，OI モデル，ユークリッド距離モデル，SR モデル，対称 SR モデルに加え，3 つの下位モデルのいずれも仮定しない“飽和モデル”（saturated model）も含めることができる．飽和モデルでは，p_{ijkl} を直接 Y_{ijkl}/n_{ijkl} と推定する．さらに，対称性を仮定した“対称”飽和モデルも取り入れることができる．

5　対称性検定

本方法は ASYMMAXSCAL と同様，各種対称性仮説を検定することができる．本方法で検定できる対称性仮説は 3 種類ある．その 1 つは飽和モデルに基づくもので，データ収集法により異なるものの，上述した“拡張”完全三組法によるデータでは，

$$H_0^{(cs/ct)}:\ p_{ijik} = p_{jiki}, \qquad \text{for all } i \text{ and } j > k, \tag{7}$$

と書ける．残りの 2 つの対称性仮説はそれぞれ SR モデルと OI モデルに基づくもので，それぞれ

$$H_0^{(s/sr)} \ :\ g_{ij} = g_{ji}, \qquad (1 \le i < j \le n), \tag{8}$$

$$H_0^{(s/oi)} \ :\ r_1 = r_2 = \cdots = r_n, \tag{9}$$

と書ける．ここで n は対象の数である．本方法では，これらの対称性仮説を尤度比統計量により検定できる．

Ⅲ 方　法

調査は，2009年６月～７月に愛知県内の複数の大学において大学生を対象に行った．そのうち，回答のあった1800名の日本人の大学生のデータを分析の対象とした．対象者は男性1003名，女性797名で，平均年齢は19.13歳，標準偏差は1.55であった．各対象者は，Ａの政府がより友好的なのはＢの政府とＣの政府のどちらだと思うか，または，Ａの政府に対してより友好的なのはＢの政府とＣの政府のどちらだと思うか，のいずれかを，中国，日本，北朝鮮，ロシア，韓国，アメリカの中から無作為に割り当てられたＡ，Ｂ，Ｃの組み合わせについて判断した．したがって設問は全部で120通りあり，１つの設問につき15名の対象者が割り当てられた．このように１人の対象者につき１つの判断を求める単一判断サンプリングを行ったのは，上述したように分析手法がすべての組み合わせの判断の独立性を仮定しているためである．

Ⅳ 結　果

対称性検定の結果を表１に示す．これより，$H_0^{(cs/ct)}$ と $H_0^{(s/sr)}$ は棄却されず，$H_0^{(s/oi)}$ の検定では概ね有意傾向であることがわかる．

各候補モデルの適合度を表２に示す．これより，３次元ユークリッド距離モデルが最適モデルであることがわかる．なお，３次元 OI モデルの AIC は最適モデルの AIC よりも若干大きいものの，ほぼ同じ値であることがわかる．図１に３次元ユークリッド距離モデルで得られた布置を，図２に３次元 OI モデルで得られた布置と付随する球を，それぞれ示す．なお，図１の

表１　対称性検定の結果

対称性仮説	次元数	χ^2	自由度	p-値
$H_0^{(s/oi)}$	1	9.29	5	0.098
	2	9.10	5	0.105
	3	9.42	5	0.093
	4	9.45	5	0.093
	5	9.45	5	0.093
$H_0^{(s/sr)}$	－	17.17	15	0.309
$H_0^{(cs/ct)}$	－	64.93	60	0.309

表２　各候補モデルの適合度

候補モデル	次元数	AIC	$\ln L$	v
OI モデル	1	67.00	−1022.00	10
	2	9.29	−989.15	14
	3	0.80	−981.90	17
	4	3.91	−981.45	19
	5	5.91	−981.45	20
ユークリッド距離モデル	1	66.28	−1026.64	5
	2	8.39	−993.70	9
	3	0.22	−986.61	12
	4	3.35	−986.18	14
	5	5.35	−986.18	15
SR モデル	－	16.18	−977.59	29
対称 SR モデル	－	3.35	−986.18	14
飽和モデル	－	69.01	−913.01	120
対称飽和モデル	－	13.94	−945.47	60

注１）$\ln L$ は対数尤度, v はモデルの有効パラメータ数を示す．
注２）AIC からはあらかじめ1997を引いてある．

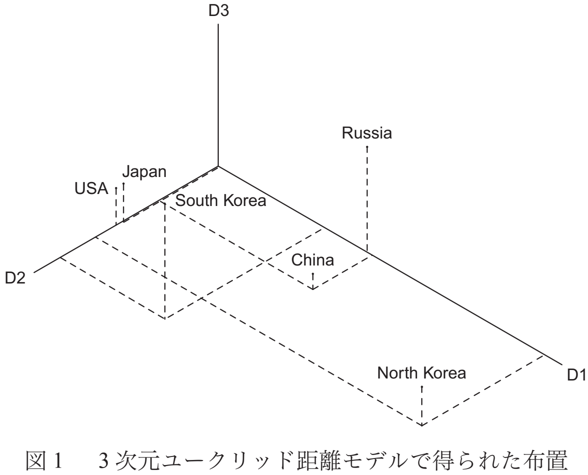

図１　３次元ユークリッド距離モデルで得られた布置

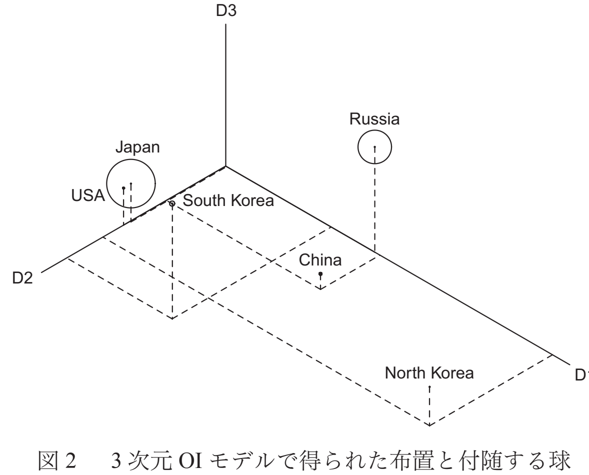

図２　３次元 OI モデルで得られた布置と付随する球

布置は主軸回転を施したもので，図 2 の布置は図 1 の布置に近づけるように Schönemann & Carroll（1970）によるプロクラステス問題の解法を適用したものである．

V　考　　察

対称性検定の結果，$H_0^{(s/oi)}$ の検定では概ね有意傾向であり，他の仮説は棄却されない結果となった．同様の国家間友好度（ただしロシアを含まない）を評定尺度法により調べたデータに ASYMMAXSCAL を適用した事例（Saburi & Chino, 2008）では，いずれの対称性仮説も棄却されている．これには，今回はロシアを含めている点や調査時期による国際情勢の違いがある他，特にデータ収集法の違いが影響していると考えられる．評定尺度データは，ある国から別のある国への友好度を「友好的」「敵対的」などのカテゴリーに分類したものであり，絶対的な評価であるのに対し，今回の一対比較データは，ある国から別のある国への友好度を第 3 の国との比較によって得ており，相対的な評価である．また，今回の拡張完全三組法によるデータ収集では，o_{ij} と o_{ji} を直接比較することは求めていない．そのため，$H_0^{(cs/ct)}$ もあくまで間接的に対称性を定義しているに過ぎない．こういった今回のデータの性質が，先行研究とは異なる対称性検定の結果をもたらした可能性が考えられる．

図 1 と図 2 より，最適モデルである 3 次元ユークリッド距離モデルの布置と，最適モデルに近い AIC を示した 3 次元 OI モデルの布置は，ほぼ一致していることがわかる．この共通の布置の第 1 次元では，日本・アメリカと北朝鮮が対峙しており，中間に韓国，中国，ロシアが位置している．同様の次元は Saburi & Chino（2008）においても得られている．第 2 次元では韓国とロシアが対峙しており，第 3 次元はそれらの両国と他の国との対立軸であることがわかる．

また，最適モデルではないものの，適合度がほぼ同じであった 3 次元 OI モデルにおいて得られた球については，日本の球が他国に比べ大きいことがわかる．球の大きさは，他国に対して友好的で，他国からは敵対的に見られるという歪対称性を示しており，日本におけるこの傾向は Saburi & Chino（2008）においても得られている．加えて，本研究ではロシアの球も日本に次いで大きいことを示している．ただし，今回得られた日本の球は Saburi & Chino で得られた球よりも布置に対して相対的に小さく，ロシアの球はさらに小さい上に，それ以外の国の球は無視できるほど小さい（半径のパラメータの不定性のため，6 カ国中最小である北朝鮮の球の半径は 0 としてある）ことから，全体として先行研究よりも歪対称性が小さいことがわかる．これは，3 次元 OI モデルよりも 3 次元ユークリッド距離モデルの方が AIC 基準で適合が若干ではあるが良かったことや，対称性検定の結果と概ね整合する．この歪対称性の小ささについても，上述したデータ収集法の違いが影響している可能性が考えられる．

謝　　辞

本研究におけるデータ収集に際しては，愛知県内の複数の大学で授業の時間をお借りし，実施させていただいた．貴重な授業の時間を割いていただいた先生方，ご協力いただいた学生の皆様に謝意を表わす．

引用文献

Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In B. N. Petrov & F. Csaki (Eds.), *The second international symposium on information theory*. Budapest: Akadémiai Kiado.

Bock, R. D., & Jones, L. V. (1968). *The measurement and prediction of judgment and choice*. San Francisco: Holden-Day.

Borg, I., & Groenen, P. J. F. (2007). *Modern multidimensional scaling: theory and applications* (2nd edition). New York: Springer.

Okada, A., & Imaizumi, T. (1987). Nonmetric multidimensional scaling of asymmetric proximities. *Behaviormetrika*, **21**, 81–96.

Saburi, S., & Chino, N. (2007). An ML asymmetric MDS for paired commparison data. *Abstracts of the 72nd Annual Meeting of the Psychometric Society* (p. 9). Tokyo, Japan.

Saburi, S., & Chino, N. (2008). A maximum likelihood method for an asymmetric MDS model. *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 4673–4684.

Schönemann, P. H., & Carroll, R. M. (1970). Fitting one matrix to another under choice of a central dilation and a rigid motion. *Psychometrika*, **35**, 245–255.

Takane, Y. (1978a). A maximum likelihood method for nonmetric multidimensional scaling: I. The case in which all empirical pairwise orderings are independent- Theory. *Japanese Psychological Research*, **20**, 7–17.

Takane, Y. (1978b). A maximum likelihood method for nonmetric multidimensional scaling: II. The case in which all empirical pairwise orderings are independent- Evaluations. *Japanese Psychological Research*, **20**, 105–114.

Takane, Y. (1981). Multidimensional successive categories scaling: A maximum likelihood method. *Psychometrika*, **46**, 9–28.

Torgerson, W. S. (1952). Multidimensional scaling: I. Theory and method. *Psychometrika*, **17**, 401–419.

最終版平成21年12月25日受理

Journal of the Institute for Psychological and Physical Science, Vol. 2, No. 1, 43−48, 2010

An Application of Maximum Likelihood Asymmetric Multidimensional Scaling for Paired Comparison Data

—Analysis of Friendship Data Among Nations in East Asia and the Related Nations—

Shingo SABURI, Naohito CHINO

Abstract

This study shows an application of maximum likelihood asymmetric multidimensional scaling for paired comparison data. This method enables us to compare various candidate models by AIC, and to test several symmetry hypotheses. It was applied to the friendship data among China, Japan, North Korea, Russia, South Korea, and the U.S.A., which was collected by an expanded complete method of triads. As a result, some symmetry hypotheses were not rejected and others were largely tended to be rejected. According to AIC, three-dimensional Euclidean distance model was the most optimal model, but three-dimensional Okada and Imaizumi (1987)'s model showed almost the same AIC value. These results were compared with those of the preceding study dealing with the similar relationship.

Keywords: asymmetric multidimensional scaling, maximum likelihood method, paired comparison